

## Chapitre 09

# Mouvement dans un champ de gravitation

**T**OUJOURS dans le domaine de la mécanique, à la suite des chapitres 6, 7, on se propose ici d'étudier le mouvement d'un corps en orbite autour d'un autre, comme pour les planètes, les satellites, les astéroïdes etc.

Ce chapitre s'articule autour du plan suivant :

- Lois de Kepler
- Mouvement circulaire uniforme (Vidéo)

<https://www.youtube.com/watch?v=EwYOvMsgeMQ>

## 9.1 Lois de Kepler

### 9.1.1 1<sup>ère</sup> loi de Kepler : loi des orbites

#### 1<sup>ère</sup> loi de Kepler : loi des orbites

Les planètes et les satellites décrivent une orbite elliptique plane dont le centre attracteur est l'un des foyers.

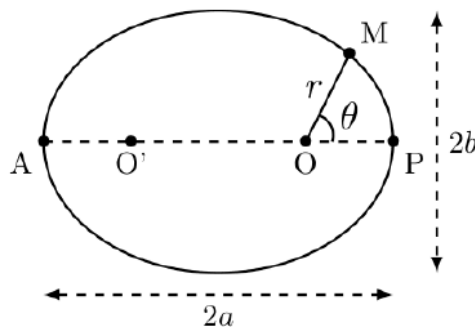


Figure 9.1 – Schéma d'une ellipse, de foyers  $O$  et  $O'$ , de demi grand axe  $a$  et demi petit axe  $b$ .

### 9.1.2 2<sup>ème</sup> loi de Kepler : loi des aires

#### 2<sup>ème</sup> loi de Kepler : loi des aires

Le segment reliant les points  $O$  et  $M_i$  balaie des aires égales pendant des durées égales  $\Delta t$ .

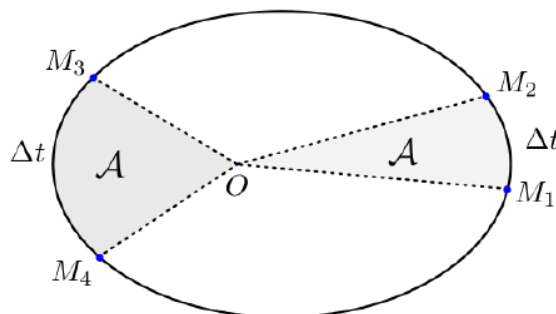


Figure 9.2 – Loi des aires.

### 9.1.3 3<sup>ème</sup> loi de Kepler : loi des périodes

#### 3<sup>ème</sup> loi de Kepler : loi des périodes

La période de révolution  $T$  d'un corps en orbite autour d'un autre, est liée au demi-grand axe  $a$  de l'ellipse par :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$$

#### Remarques :

- Attention, la constante n'est pas une constante universelle, elle dépend du corps qui joue le rôle de centre de gravitation à l'un des foyers de l'ellipse.
- $a$  ne désigne pas l'accélération ici, mais bien le demi-grand axe de l'ellipse ; c'est une longueur en m.

## 9.2 Mouvement circulaire uniforme

D'un point de vue mathématique, un cercle est une ellipse particulière dont les foyers sont confondus (appelé le centre  $O$  du cercle), et où les demi-grand et petit axes sont égaux au rayon  $r$  du cercle.

Dans cette section, on considère un corps de masse  $m$ , assimilé à son centre de gravité  $G$ , ayant une orbite circulaire autour d'un autre corps de masse  $M$ , assimilé à son centre de gravité  $O$ . On note  $r$  le rayon de l'orbite (cf. figure 9.3).

- Système :  $\{G\}$
- Référentiel : «  $O$ -centrique » dans le repère de Frenet
- Bilan des forces : Force gravitationnelle  $\vec{F}$  exercée par  $O$  sur  $G$

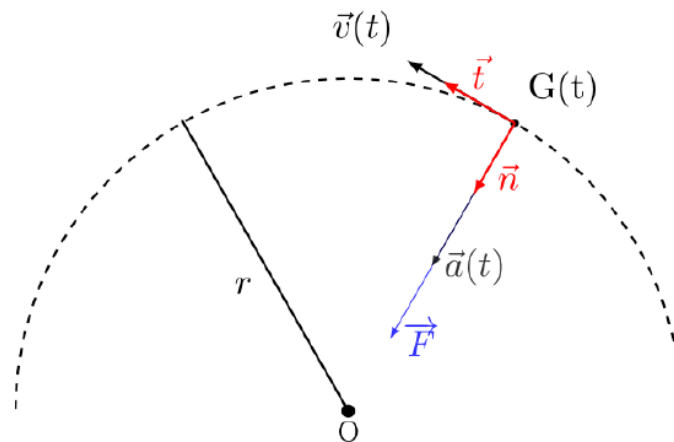


Figure 9.3 – Schéma d'un corps en orbite circulaire autour d'un autre, dans le repère de Frenet.

### 9.2.1 Accélération centripète pour une trajectoire circulaire

#### Accélération centripète

D'après la seconde loi de Newton pour un système de masse constante :

$$m \vec{a}(t) = \vec{F} = G \frac{mM}{r^2} \vec{n} \quad (13.1)$$

La force  $\vec{F}$  étant dirigée de  $G$  vers  $O$ , alors le vecteur accélération  $\vec{a}(t)$  aussi. On dit que l'accélération est **centripète**.

## 9.2.2 Vitesse pour une trajectoire circulaire

### Vitesse en mouvement circulaire

L'accélération s'exprime dans le repère de Frenet par :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{t} + \frac{v^2(t)}{R} \vec{n}$$

D'après l'équation 13.1, on en déduit :

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{v^2(t)}{r} = G \frac{M}{r^2}$$

On déduit de la première égalité que le mouvement est **uniforme** car  $\frac{dv(t)}{dt} = 0 \implies v = \text{cste}$ .  
La deuxième égalité nous donne la norme constante de la vitesse :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

**Remarque :** On peut également montrer qu'une orbite circulaire est nécessairement uniforme à l'aide de la seconde loi de Kepler. En effet, le segment  $[OG]$  est alors constant, donc pour que les aires balayées soient égales pendant une même durée  $\Delta t$ , il faut que la longueur de l'arc de cercle parcouru soit le même à chaque fois, et donc que la vitesse soit constante.

## 9.2.3 Période de révolution et 3<sup>ème</sup> loi de Kepler

Puisque le mouvement est circulaire uniforme, on en déduit que la vitesse du corps  $G$  peut s'écrire :

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Où  $2\pi r$  représente le périmètre du cercle, donc la distance parcourue par  $G$  en un tour complet, et  $T$  la période de révolution de  $G$  autour de  $O$ .

### Période de révolution en mouvement circulaire uniforme

La vitesse  $v$  constante de  $G$  au cours de son mouvement circulaire autour de  $O$  s'exprime de deux manières :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \text{et} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Par égalité, et en passant au carré, on obtient :  $\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r}$ , soit :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{cste} \quad (3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler})$$

## 9.2.4 Satellite géostationnaire

### Satellite géostationnaire

On dit qu'un satellite est **géostationnaire** lorsqu'il est immobile dans le référentiel terrestre. Il tourne donc à la même vitesse que la Terre sur elle-même.